

Matematika za život



**Prof. dr. sc. Vesna
Vlahović-Štetić**
Odsjek za psihologiju
Filozofski fakultet
Sveučilište u Zagrebu

Kad razmišljamo o obrazovanju, onda je svakako jedan od očekivanih ciljeva da će nam ono omogućiti stjecanje znanja potrebnih za kasnije dobro funkcioniranje u životu. Posebno je to slučaj sa znanjima iz matematike – očekujemo da smo tijekom obrazovanja stekli znanja koja možemo rabiti pri svakodnevnoj kupovini, pri računanju koliko nam pločica treba za pod u kupaonici, kolika će nam biti rata kredita... da ne govorimo o složenim matematičkim znanjima i vještinama potrebnim u mnogim tehničkim ili prirodnjačkim strukama.

Stjecanje predmatematičkih i matematičkih znanja započinje vrlo rano. Istraživanja pokazuju da već i kod beba starih oko 6 mjeseci možemo uočiti neka od tih znanja. Tako su primjerice bebe sposobne uočiti jednakost ili razliku među skupovima koji imaju do četiri elementa (Klein i Starkey, 1987.). Do tog zaključka došlo se ispitujući habituaciju. Habituacija je vrijeme koje bebe provedu gledajući u neki podražaj – ukoliko im je podražaj poznat, gledaju ga kraće, a ako je nov, dulje zadržavaju pozornost na njemu. Bebama su prikazivali slike na kojima su bili skupovi od primjerice tri objekta. Slika se od slike razlikovala po veličini objekata, njihovom obliku, međusobnoj udaljenosti, teksturi i svjetlini, no na svakoj slici su bila tri objekta. Nakon nekog vremena bebe su sve kraće obraćale pozornost na prikazane slike jer su im one bile već poznate (došlo je do habituacije). Međutim, ukoliko bi se nakon toga u nizu pojavila slika s dva ili četiri objekta, bebe su dulje gledale u novu sliku pokazujući time da uočavaju razliku između nje i onih prethodno prikazanih. Zanimljivo je da bebe, ukoliko je broj objekata na

slici bio veći od četiri, nisu bile više sposobne za razlikovanje, dakle jednako dugo promatraju nizove od 6 objekata kao i novu sliku od 5 objekata. Tek s tri ili četiri godine života djeca mogu razlikovati skup od četiri elementa od skupa od pet ili šest elemenata (Starkey i Cooper, 1980.).

Tijekom druge godine života djeca nauče nazive brojeva, roditelji ili bake i djedovi ih spominju penjući se s mališanima uza stube, odbrojavaju korake u šetnji, recitiraju brojalice. No u toj dobi djeca ne pridružuju tim imenima uobičajeno značenje koje im pridružuju odrasli (Wynn, 1992.). Djeca su u stanju ponavljati ili samostalno govoriti: »jedan, dva tri, jedan dva, tri« a da im pritom nazivi brojeva ništa ne znače, odnosno predstavljaju samo dio rituala penjanja uza stube. Tijekom treće godine počinje stvarno učenje brojenja. Iako odraslima zvuči sasvim jednostavno, brojenje je složena aktivnost koja uključuje čitav niz načela (Gelman i Meck, 1986., Nunes i Bryant, 1996.):

- načelo pridruživanja jedan prema jedan – svakom predmetu može se pridružiti samo jedan broj;
- načelo ordinalnosti – brojevi su poredani od manjeg prema većem (položaj u nizu je stalan);
- načelo kardinalnosti – zadnji izgovoreni broj predstavlja ukupan broj predmeta u skupu;
- načelo prebrojivosti – bez obzira koliko je elemenata u skupu, oni se mogu prebrojiti;
- načelo nevažnog redoslijeda – promjena redoslijeda pridruživanja brojeva ne mijenja ništa – može se početi brojati s bilo koje strane;
- načelo konzervacije – bez obzira na prostorni raspored, broj predmeta je stalan;
- načelo tranzitivnosti – stalnost u usporedbi između tri ili više predmeta ($A > B$, $B > C$, $A > C$);
- načelo reverzibilnosti – razumijevanje reverzibilnog odnosa zbrajanja i oduzimanja ($5+2-2=5$), dakle ako nekom skupu dodamo i odmah oduzmemo isti broj, stanje

se ne mijenja.

Načela brojenja ne usvajaju se istodobno, neka prethode drugima pa tako tek četverogodišnjaci razumiju princip kardinalnosti, tj. da je broj elemenata u skupu jednak zadnjem broju izrečenom tijekom brojenja. Mlađa djeca mogu uspješno prebrojiti elemente u skupu, ali ne znaju odgovoriti na pitanje: 'Koliko ovdje ima autića (pikula, bombona)?'

Otprilike u dobi od četiri do pet godina djeca postaju sposobna odgovoriti i na probleme ordinalnosti: 'Što je više: pet ili šest jabuka?' Što su spomenuti brojevi pritom međusobno bliže na brojevnom pravcu, to im više vremena treba za odgovor (Donaldson i Balfour, 1968.). Dakle, djeca će puno brže odgovoriti na problem: '*Petar ima 3 olovke, a Igor ima 8 olovaka. Tko ima više*' nego na pitanje '*Petar ima 6 olovaka, a Igor ima 8 olovaka. Tko ima više?*'

Također, kad je riječ o načelima brojenja, mnoga djeca ih nisu u stanju verbalizirati ali ih uspješno primjenjuju, a ta je vještina vrlo važna za kasnije matematičko postignuće.

Prije početka formalnog školovanja djeca usvoje mnoga matematička znanja: obično svladaju brojenje do 10, razlikuju glavne i redne brojeve, te nauče pisane simbole za jednoznamenaste brojeve (Sinclair i Sinclair, 1986.).

Predškolska djeca znaju i zbrajati i oduzimati u skupu do 10, a pritom za zbrajanje rabe različite strategije (Fuson, 1990.):

- prebrojavanje elemenata (1, 2, 3, 4... 7);
- nastavljanje prebrojavanja na jedan od pribrojnika, pri čemu djeca brzo nauče da je lakše nastaviti od većeg pribrojnika ($4 + 3$ kao četiri, pet, šest, sedam);
- rastavljanje pribrojnika na jednake brojeve i pribrajanje ostatka ($3 + 3 = 6$ i još 1 je 7);
- dozivanje informacije iz dugoročnog pamćenja).

Slične su i dječje strategije za oduzimanje (Siegler, 1987.):

- podizanje u zrak prstića koji

predstavljaju umanjjenik, spuštanje onoliko prstića koliko iznosi umanjitelj i prebrojavanje ostatka;

- ista operacija bez konkretnih objekata, samo brojeći naglas;
- uporaba prstića za prikazivanje umanjjenika i umanjitelja, ali preostale prstiće ne prebrojavaju već samo izriču njihov broj;
- dozivanje rezultata iz dugoročnog pamćenja.

Dozivanje iz dugoročnog pamćenja

Djeca mogu istodobno rabiti više različitih strategija zbrajanja i oduzimanja, no najčešće su usmjerena na jednu do dvije. U školi obično tražimo da traženo rješenje dozovu iz dugoročnog pamćenja. Međutim to je moguće ako su djeca više puta pohranila točnu informaciju u dugoročno pamćenje, a to mogu učiniti jedino ako su prethodno rabila ove 'niže' strategije. Dakle uporaba tih strategija nije zabranjena, naprotiv, ona će osigurati da u dugoročno pamćenje bude pohranjena točna informacija i tek nakon puno uporabe 'nižih' strategija dijete može koristiti i dozivanje iz dugoročnog pamćenja. Drugim riječima, treba dopustiti djeci da rabe i ostale strategije jer će njihova uporaba dovesti do kasnijeg točnog rezultata pri uporabi željene 'složenije' strategije.

Brojenje te zbrajanje i oduzimanje djeca koriste kako bi riješila probleme iz stvarnog života pa su tako predškolci vrlo uspješni pri rješavanju nekih vrsta problemskih zadataka. No pokazuje se da s početkom formalnog obrazovanja za mnogu djecu započinju i teškoće vezane uz učenje matematike te otprilike 6.5% osnovnoškolske djece ima teškoća u matematici. Pri tome neka djeca imaju teškoća zbog razvojnog zaostajanja u izvedbi aritmetičkih procedura. Oni rabe iste strategije kao i vršnjaci, ali izvode ih s manje sigurnosti i brzine. Ponekad se teškoće u matematici preklapaju i s razvojnim zaostajanjem u čitanju i pisanju. Zanimljivo je da to razvojno zaostajanje većina djece nadoknadi negdje do kraja drugog razreda

osnovne škole i onda kasnije napreduju jednakim tempom kao i njihovi vršnjaci. Druga vrsta problema koju imaju neka djeca vezana je uz dozivanje matematičkih činjenica iz dugoročnog pamćenja. Potrebno im je dulje vrijeme za dosjećanje jednostavnih rezultata nego njihovim vršnjacima. Sustavno uvježbavanje, u tom slučaju, nažalost, ne dovodi do željenih učinaka i ovaj deficit zadržava se tijekom cijelog osnovnoškolskog razdoblja, a vjerojatno i kasnije. Neka istraživanja govore i o relativno lošoj radnoj memoriji djece



s takvim teškoćama u matematici: oni mogu zapamtiti manje zadanih brojeva, a i brojeve sporije od druge djece.

No zanimljivo je da matematiku smatra teškom i većina ostale djece, dakle ona koja ne bi trebala imati nikakvih objektivnih teškoća u svladavanju matematičkih sadržaja.

Činjenica je da ponekad postoji neusklađen odnos školskog poučavanja i dječjeg kognitivnog razvoja. U osnovnoškolskom razdoblju učenici prolaze dvije faze kognitivnog razvoja. Na početku školovanja su na prelasku iz predoperacionalne razvojne faze u fazu konkretnih operacija, a krajem šestog razreda većina djece ulazi u fazu formalnih operacija.

U fazi konkretnih operacija (između sedam i jedanaest godina) dijete može stvarati pojmove, uviđati odnose i rješavati probleme samo ako radi s poznatim ili konkretnim predmetima. Sposobno je razumjeti da količina ostaje ista bez obzira na raspored u prostoru, može slagati predmete prema nekom mjerljivom svojstvu, npr. od najmanjeg do najvećeg, može zaključivati o odnosu između dva predmeta na temelju znanja o njihovom odnosu prema trećem predmetu, sposobno je predmete klasificirati s obzirom na neka svojstva. Mišljenje djece postaje reverzibilno, mogu logički baratati s više dimenzija istodobno. Dijete u fazi konkretnih operacija vidi situacije i iz perspektive drugih a ne samo iz svoje perspektive, sve češće logično razmišlja i javljaju se začeci uzročno-posljedičnog zaključivanja.

U razdoblju formalnih operacija (od dvanaest godina nadalje) razmišljanje postaje sve apstraktnije. Dijete može zamišljati hipotetske situacije služeći se apstraktnim pojmovima, može rješavati probleme koji uključuju *proporcionalno* i *analogijsko* mišljenje. U ovoj fazi svog kognitivnog razvoja djeca su sposobna za generalizacije pa na temelju uvida u jedan slučaj mogu zaključivati što će se dogoditi u sličnoj situaciji.

Ukoliko program od desetogodišnjaka zahtijeva rezoniranje na razini formalnih operacija, većina njih tome neće moći udovoljiti, ali valja znati da niti svi trinaestogodišnjaci nisu u fazi formalnih operacija pa će zahtjevi realistični za većinu učenika šestog ili sedmog razreda nekima od njih biti razvojno preteški.

Što je posao učitelja matematike?

Drugi je problem zbog kojeg djeca vide matematiku kao težak predmet onaj da poučavanje matematike može biti neprimjereno. Školsko poučavanje trebalo bi se nadovezivati na dječja svakodnevna iskustva. Što je jasnija primjena onoga o čemu pouka govori, to će biti bolji i trajniji njezini rezultati. No školsko poučavanje matematike započinje s brojkama i računanjem

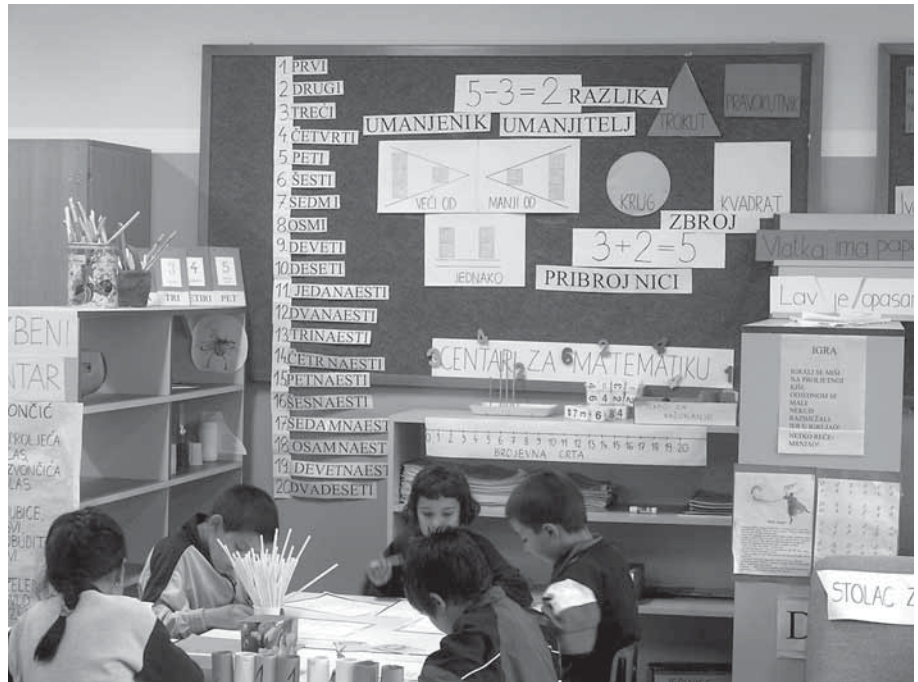
a ne rješavanjem problema i takva pouka se kasnije nastavlja pa su često važnije matematičke operacije nego problemi. Stariji, asocijacionistički pristup poučavanju matematike insistira na uvježbavanju postupaka. Učenik treba korak po korak usvojiti konvencionalnu proceduru i tako će naučiti matematiku. Ustrajavanje na poučavanju proceduralnog dovodi do rezultata koje prikazuju Bisanz i Dunn (1995.). Oni su ispitanicima zadavali nizove zadataka u kojima je trebalo pribrojiti i oduzeti isti broj (npr. $6+4-4$). Šestogodišnjaci i odrasli ispitanici nisu pri ovakvim zadacima računali zbroj i razliku, već su izravno davali rješenja. No devetogodišnjaci su sve računali vjerujući da u školi moraju uvijek računati. Kod njih je naučeno izvođenje postupka imalo prednost pred razumijevanjem jednog od temeljnih načela – načela reverzibilnosti.

Drugi pristup poučavanju je kognitivistički koji smatra da valja poučavati i razjasniti pojmove (koncepte) i omogućiti djeci da organiziraju kognitivne sheme. Prema kognitivistima, školsko poučavanje mora uzeti u obzir dječja neformalna znanja, a istraživanja pokazuju da djeca mogu uspješno rješavati vrlo složene matematičke probleme ukoliko je situacija u zadacima vezana uz njihovo životno iskustvo (Saxe, 1988.; Baranes i sur., 1989.). Oni drže da je važno učenike poučiti strateški razmišljati na poznatim situacijama i onda će biti sposobni to znanje primijeniti u novim situacijama. Ukoliko se matematika poučava kroz razumijevanje pojmova i rješavanje problema, i razumijevanje postupaka će biti bolje. Naravno, neke postupke valja uvježbati do automatizma (primjerice tablicu množenja), ali najvažnije je razumjeti kada i kako te postupke uporabiti.

I da se vratimo na početak ovog teksta. Što je to matematika za život i kako se ona uči?

Istraživanja dječjih matematičkih postignuća pokazuju da su konstruktivisti bili u pravu govoreći da je posao učitelja:

- pomoći učeniku da nadograđuje na postojeće znanje (djeca imaju neformalna matematička znanja i na njima treba graditi nova);
- omogućiti učeniku slobodu za njegove vlastite konstrukcije (prečesto u matematici dopuštamo samo načine rješavanja koji su propisani programom a ne uvažavamo da djeca mogu imati svoje vlastite strategije koje mogu odlično funkcionirati);
- osigurati atmosferu u kojoj rasprava pomaže izgradnji učenikova znanja (o matematici se u razredima premalo raspravlja – nastava je usmjerena na točno rješavanje zadataka a ne na atmosferu rasprave o putovima rješavanja problema);
- učenje se može odigravati i kroz kognitivni konflikt pred koji učitelj stavlja učenika kao bi preispitao svoja znanja (prečesto poučavamo tako da izravno serviramo rješenja umjesto da učenicima ponudimo situacije u kojima sami moraju naći odgovore na nejasnoće i dvojbe);
- pripremiti manipulativne materijale ili ilustracije nužne za poučavanje s razumijevanjem (u poučavanju matematike rabimo manipulativne materijale, ali relativno brzo odustajemo od njih iako su učenici sve negdje do 6. razreda u razvojnoj fazi konkretnih operacija);
- osigurati socijalnu interakciju – učenik će biti potaknut reakcijama drugih učenika (matematika se vrlo često poučava kao samostalno rješavanje zadataka, a učenici bi mogli puno naučiti u međusobnoj interakciji i razmjeni strategija, posebice lošiji učenici koji ne mogu sami doći do novih načina rješavanja zadataka);
- suočiti učenike s bogatom okolinom, složenim situacijama koje će potaknuti rješavanje problema (računanje nije izazov ali rješavanje složenih problema jest, a to je ujedno i priprema za onakvu matematiku s kojom ćemo se susretati u stvarnom životu).



Reference:

- Baranes, R., Perry, M., Stigler, J. (1989.): *Activation of real-world knowledge in the solution of word problems*, Cognition and Instruction, 6, 287-318.
- Bisanz, J., Dunn, M. (1995.): *Effects of age and schooling on the acquisition of elementary quantitative skills*, Developmental Psychology, 31, 221-237.
- Donaldson, M., Balfour, G. (1968.): *The less is more: A study of language comprehension in mathematical tasks*, Review of Educational Research, 59, 185-213.
- Fuson, K. (1990.): *Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction and place value*, Cognition and Instruction, 7, 4, 343-403.
- Gelman, R., Meck, E. (1986.): *The notion of principle: The case of counting*, U: Hiebert, J. (ur.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, (29-58), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Klein, A., Starkey, P. (1987.): *The origins and development of numerical cognition: A comparative analysis*, U: Sloboda, J. A., Rogers, D. (ur.) *Cognitive processes in mathematics*. (1-25), Oxford: Clarendon Press.
- Nunes, T., Bryant, P. (1996.): *Children doing mathematics*, Cambridge: Blackwell.
- Saxe, G. B. (1988.): *The mathematics of child street vendors*, Child Development, 59, 1415-1425.
- Siegler, R. S. (1987.): *Strategy choices in subtraction*. U: Sloboda, J. A., Rogers, D. (ur.) *Cognitive processes in mathematics*. (81-106), Oxford: Clarendon Press.
- Sinclair, H., Sinclair, A. (1986.): *Children's mastery of written numerals and the construction of basic number concepts*, U: Hiebert, J. (ur.): *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, (59-74), Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Starkey, P., Cooper, R. S. (1980.): *Perception of numbers by human infants*, Science, 210, 1033-1035.
- Wynn, K. (1992.): *Children's acquisition of the number words and the counting system*, Cognitive Psychology, 24, 220-251.